ANALYSE NUMÉRIQUE

Durée : 6 heures

0. PRÉAMBULE ET NOTATIONS

On ne considérera dans le corps du problème que des espaces vectoriels réels.

On notera $\mathfrak{M}_{p,q}$ l'espace des matrices réelles à p lignes et q colonnes; si $p = q$, on note $\mathfrak{M}_p = \mathfrak{M}_{p,p}$. Le groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{M}_N$ est noté $GL_N(\mathbb{R})$.

L'élément appartenant à la j-ième ligne et à la k-ième colonne d'une matrice M est noté $(M)_{jk}$.

La transposée M^T d'une matrice M appartenant à $\mathfrak{M}_{p,q}$ est définie par

$$(M^T)_{jk} = (M)_{kj}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, q\}, \quad \forall k \in \{1, \ldots, p\}.$$

Si V est un espace vectoriel normé, $\mathfrak{L}(V)$ est l'espace des applications linéaires continues de V dans lui-même, et $GL(V)$ désigne le groupe des éléments inversibles de $\mathfrak{L}(V)$. On désigne par I l'application identité.

L'espace $\mathfrak{A}(V)$ est l'espace des applications affines de V dans lui-même.

Soit U un espace vectoriel de dimension finie, et H un espace vectoriel isomorphe à U. On étudie dans ce problème une méthode rapide de résolution d'un système linéaire.

(0.1) $Au = b$,

où A est un isomorphisme entre U et H.

On appelle méthode itérative de résolution de (0.1) le schéma itératif défini par la donnée d'une application linéaire f de U × H dans U qui associe à toute donnée initiale u^0 et à tout second membre b la suite des itérées données par

(0.2) $u^{n+1} = f(u^n, b)$.

On fait l'hypothèse suivante sur f :

(0.3) Quel que soit b, $A^{-1}b$ est point fixe de l'application $u \longrightarrow f(u, b)$.

On appellera erreur à l'itération n le vecteur $u^n - A^{-1}b$.

On notera $\mathfrak{I}(A)$ l'ensemble des applications linéaires de U × H dans U qui satisfont l'hypothèse (0.3), relativement à l'opérateur A.

On dit que la méthode itérative f converge si, quels que soient u^0 et b, la suite des u^n converge vers $A^{-1}b$ quand n tend vers l'infini.

Le rayon spectral d'un élément A de $\mathfrak{L}(V)$ est la borne inférieure de l'ensemble des réels positifs ou nuls r tels que $A - zI$ soit dans $GL(V)$ pour z en dehors du disque fermé de rayon r du plan complexe. On note $\rho(A)$ le rayon spectral de A.

On rappelle que le rayon spectral d'un opérateur linéaire en dimension finie est le maximum du module de ses valeurs propres, et que si $\|.\|$ est une norme vectorielle arbitraire, et $\|A\|$ la norme d'opérateur associée à cette norme vectorielle, $\rho(A)$ est donné par la relation

(0.4) $\rho(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Cette expression de $\rho(A)$ ne dépend pas de la norme vectorielle choisie.

L'ensemble $C^{0,1}$ des fonctions continues, et de classe C^1 par morceaux sur [0, 1], nulles aux extrémités est défini comme suit : une fonction u est dans $C^{0,1}$ si et seulement si

(0.5) u est continue sur [0, 1];

(0.6) $u(0) = u(1) = 0$;

(0.7) Il existe une entier p positif ou nul et il existe p points de]0, 1[, notés $\zeta_1 < \zeta_2 < \ldots < \zeta_p$ auxquels on adjoint les points $\zeta_0 = 0$ et $\zeta_{p+1} = 1$ tels que, pour $j = 0, 1, \ldots, p$, la restriction u_j de u à l'intervalle $[\zeta_j, \zeta_{j+1}]$ soit continûment dérivable sur $]\zeta_j, \zeta_{j+1}[$, et que la dérivée $\frac{du_j}{dx}$ ait une limite à droite en ζ_j et à gauche en ζ_{j+1}.

Remarques importantes.

1° *Les difficultés du problème sont graduées; il est sage de traiter le problème dans l'ordre de l'énoncé.*

2° *Les correcteurs sauront apprécier des démonstrations claires et complètes, même si elles ne portent que sur quelques parties du problème.*

I. PRÉLIMINAIRES ALGÉBRIQUES

Question I.1.

Soient B et C deux éléments quelconques de $\mathfrak{M}_N$. Montrer en utilisant la caractérisation (0.4) que $\rho(BC) = \rho(CB)$.

Question I.2.

Soient α et β deux nombres réels. Calculer le rayon spectral de la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$.

Question I.3.

Soit A une matrice appartenant à $\mathfrak{M}_N$, qu'on suppose définie positive; on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire

$$[x, y] = y^T Ax.$$

Soit B un élément quelconque de $\mathfrak{M}_N$; l'adjoint de B relativement au produit scalaire $[.,.]$ est la matrice B^* telle que, quels que soient x et y dans $\mathbb{R}^N$,

$$[Bx, y] = [x, B^*y].$$

Calculer B^* en fonction de A et B^T.

Question I.4.

On se donne deux nombres réels α et β. On suppose β non nul et on définit une matrice tridiagonale $M(\alpha, \beta) \in \mathfrak{M}_N$ par

$$M(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & \beta & 0 & \ldots \\ & & & & & \\ 0 & \ldots & 0 & \beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Chercher les vecteurs propres de $M(\alpha, \beta)$ sous la forme

$$(y)_j = \sin(j\theta);$$

calculer les valeurs propres correspondantes.

Question I.5.

Soient U et H des espaces de dimension finie isomorphes, et soit A un isomorphisme de U sur H. Montrer qu'il y a une bijection Φ entre $\mathfrak{I}(A)$ et $\mathfrak{L}(U)$, telle que pour tous u et b,

(I.1) $f(u, b) - A^{-1}b = \Phi(f)(u - A^{-1}b)$.

Définition I.1. On dira par abus de langage que $S = \Phi(f)$ est la *matrice de la méthode itérative* f.

Question I.6.

Soient f_1 et f_2 deux éléments de $\mathfrak{I}(A)$. On définit une loi de composition par

$$(f_2 \not\equiv f_1)(x, b) = f_2(f_1(x, b), b).$$

Montrer que $f_2 \not\equiv f_1$ est dans $\mathfrak{I}(A)$. Exprimer $\Phi(f_2 \not\equiv f_1)$ en fonction de $\Phi(f_1)$ et de $\Phi(f_2)$.

Tournez la page S. V. P.

Question I.7.

Soit f un élément de $\mathfrak{I}(A)$. On définit $f^{\circ n}$ par (I.2) $f^{\circ 1} = f$; $f^{\circ n+1} = f^{\circ n} \circ f$.

Calculer $\Phi(f^{\circ n})$ en fonction de $\Phi(f)$.

Question I.8.

Montrer qu'une méthode itérative f converge si et seulement si $\Phi(f)$ est de rayon spectral strictement inférieur à 1. On pourra utiliser la relation (0.4).

Définition I.2. On dira que $\rho(\Phi(f))$ est le *taux de convergence de la méthode f*.

II. PRÉLIMINAIRES : CONSTRUCTION D'UN PROBLÈME DISCRET

On définit une application de $C^{\infty}_1 \times C^{\infty}_1$ dans R par (II.1) $[u, v] = \int_0^1 u'(x)\, v'(x)\, dx$.

Question II.1.

Montrer que C^{∞}_1 est un espace vectoriel et que (II.1) y définit un produit scalaire. On note : $|u| = [u, u]^{\frac{1}{2}}$

la norme associée, et C^{∞}_1 est dorénavant muni de la topologie définie par cette norme.

Question II.2.

Soit L une forme linéaire continue sur C^{∞}_1. On note $< L, v >$ la valeur de la forme linéaire L en v.

Montrer que pour tout sous-espace de dimension finie H de C^{∞}_1, le problème :

(II.2) Trouver u dans H tel que pour tout v dans H, $[u, v] = < L, v >$

possède une unique solution.

Question II.3.

Soit f une fonction continue sur [0, 1]. Montrer que la forme linéaire L_f définie par

(II.3) $< L_f, u > = \int_0^1 f(x)\, u(x)\, dx$ est continue sur C^{∞}_1.

Question II.4.

Soit N un entier positif, et soit $h = \frac{1}{N+1}$. Soit V_h le sous-espace de C^{∞}_1 formé de toutes les fonctions dont la restriction à chacun des intervalles $[jh, (j+1)h]$ est un polynôme de degré au plus égal à 1. On notera φ_j la base de V_h dite base d'éléments finis, formée des éléments de V_h tels que

$$\varphi_j(kh) = \delta_{jk} = 1 \text{ si } j = k$$
$$= 0 \text{ si } j \neq k .$$

Soit f comme à la question II.3. *Écrire le problème :*

(II.4)$_{V_h}$ Trouver $\bar{u}$ dans V_h tel que pour tout v dans V_h, $[\bar{u}, v] = < L_f, v >$
sous la forme d'un système linéaire

(II.5) $A\bar{x} = b$,

où $\bar{x}$ est le vecteur des coordonnées de $\bar{u}$ dans la base des φ_j, A est une matrice qu'on donnera sous forme de tableau et b un vecteur dont on donnera les composantes en fonction de f.

Question II.5.

Calculer explicitement les valeurs propres λ_k et les vecteurs propres y_k de A. On rangera les valeurs propres de A par ordre croissant, et on normalisera les vecteurs propres de façon que

(II.6) $\sum_j |(y_k)_j|^2 = \frac{1}{2h}$, $\forall k$.

On pourra utiliser les résultats de la question I.4.

Question II.6.

On décompose A sous la forme $A = D - E$

où D est la matrice diagonale dont la diagonale est égale à la diagonale de A. On considère la méthode itérative définie par

(II.7) $Dx^{n+1} = Dx^n - 2\varepsilon Ax^n + 2\varepsilon b$.

La relation (II.7) définit une méthode itérative dépendant du paramètre ε, qu'on note $f(\varepsilon)$; la matrice de cette méthode sera notée $S(\varepsilon)$; les valeurs propres de la matrice $S(\varepsilon)$ sont désignées par $\nu_k(\varepsilon)$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Calculer le rayon spectral de $S(\varepsilon)$. Pour quelles valeurs du paramètre réel ε cette méthode est-elle convergente quel que soit N ? Pour quelle valeur de ε $\rho(S(\varepsilon))$ est-il minimal ? Montrer que pour tout choix de ε permettant la convergence, la limite de $\rho(S(\varepsilon))$ quand N tend vers l'infini vaut 1.

Question II.7.

Montrer que la méthode itérative $f\left(\frac{1}{4}\right)$ multiplie les composantes de l'erreur le long des vecteurs y_k, pour $k \geqslant \frac{N+1}{2}$, par un facteur majoré par un nombre inférieur à 1 et indépendant de N.

III. MÉTHODE BIGRILLE

Dans cette partie le paramètre ε intervenant dans la relation (II.7) *prend la valeur* $\frac{1}{4}$.

On suppose maintenant que N est un nombre impair au moins égal à 3. Soit (III.1) $\bar{N} = \frac{N-1}{2}$.

L'espace $\bar{W} = V_{2h}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $W = V_h$. Il admet une base d'éléments finis formée des fonctions $\bar{\varphi}_j$ telles que

$$\bar{\varphi}_j \in \bar{W}$$
$$\bar{\varphi}_j(2kh) = \delta_{jk}, \quad \forall j, k = 1, 2, \ldots, \bar{N} .$$

La matrice A est la matrice du système (II.4)$_{V_h}$ et la matrice $\bar{A}$ est la matrice du système (II.4)$_{V_{2h}}$.

Les vecteurs propres de $\bar{A}$ sont notés $\bar{y}_j$.

Question III.1.

Soit i l'injection de $\bar{W}$ dans W. On définit l'*opérateur de prolongement* P comme suit :

(III.2) P est la matrice de i dans les bases d'éléments finis respectives de $\bar{W}$ et W.

Écrire la matrice P.

Question III.2.

On pose (III.3) $R = P^T$.

On dira que R est un *opérateur de restriction*.

L'application j de W dans $\bar{W}$ a pour matrice R dans les bases respectives d'éléments finis. Montrer que

(III.4) $\bar{A} = RAP$.

Tournez la page S. V. P.

QUESTION III.3.

Pour $k \in \left\{1, \ldots, \frac{N-1}{2}\right\}$ on appelle Y_k le sous-espace vectoriel de W engendré par y_k et y_{N+1-k}, et $\hat{Y}_k$ le sous-espace vectoriel de $\hat{W}$ engendré par f_k. Pour $k = \frac{N+1}{2}$, $Y_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$ est le sous-espace vectoriel engendré par $y_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$, et $\hat{Y}_{\left(\frac{N+1}{2}\right)}$ est réduit à $\{0\}$. On utilisera la notation $\xi_k = \nu_k\left(\frac{1}{4}\right)$. Montrer que pour tout $k = 1, \ldots, \frac{N+1}{2}$, R applique Y_k dans $\hat{Y}_k$ et P applique $\hat{Y}_k$ dans Y_k.

QUESTION III.4.

On note f la méthode itérative de la question II.6, correspondant au paramètre $\frac{1}{4}$. On utilise la notation f^{μ} donnée par la relation (I.2) pour les itérées de f. On définit une méthode itérative bigrille en se donnant deux entiers naturels μ_1 et μ_2, tels que $\mu_1 + \mu_2 > 0$ et en définissant l'itération suivante :

(III.5) Initialisation : x^0 et b sont donnés dans $\mathbb{R}^N$;

(III.6) Prélissage : $x^{n+\frac{1}{3}} = f^{\mu_1}(x^n, b)$;

(III.7) Calcul de résidu : $r^n = Ax^{n+\frac{1}{3}} - b$;

(III.8) Calcul de correction : $\sigma^n = Rr^n$; $\bar{A}\tau^n = \sigma^n$; $c^n = P\tau^n$; ceci équivaut bien entendu à $c^n = P(\bar{A})^{-1}Rr^n$.

(III.9) Correction : $x^{n+\frac{2}{3}} = x^{n+\frac{1}{3}} - c^n$;

(III.10) Postlissage : $x^{n+1} = f^{\mu_2}(x^{n+\frac{2}{3}}, b)$. Soit (III.11) $x^{n+\frac{2}{3}} = g(x^{n+\frac{1}{3}}, b)$.

Montrer que g est un élément de $\mathcal{I}(A)$. Calculer $K = \Phi(g)$ en fonction de P, R, A et $\bar{A}$. La méthode itérative g est-elle convergente ? Montrer que Y_k est invariant par K pour $k \leqslant \frac{N+1}{2}$.

QUESTION III.5.

On notera (III.12) $x^{n+1} = f[\mu_1, \mu_2](x^n, b)$

la méthode itérative définie par (III.6)-(III.10), dite méthode bigrille. Donner en fonction de $S\left(\frac{1}{4}\right)$ et des opérateurs A, $\bar{A}$, P et R la matrice $S[\mu_1, \mu_2] = \Phi(f[\mu_1, \mu_2])$.

QUESTION III.6.

Montrer que $\rho(S[\mu_1, \mu_2]) = \rho(S[\mu_1 + \mu_2, 0]) = \rho(S[0, \mu_1 + \mu_2])$, quels que soient μ_1 et μ_2.

QUESTION III.7.

Calculer $\rho(S[\mu, 0])$ en utilisant la base de vecteurs propres de A convenablement réordonnée.

QUESTION III.8.

La méthode ainsi décrite dépend implicitement de la dimension N de W. On pose $\rho^*(\mu) = \sup_N \rho(S[\mu, 0])$.

Calculer $\rho^*(\mu)$ pour $1 \leqslant \mu \leqslant 4$. Donner une estimation asymptotique de ce rayon spectral pour μ grand.

QUESTION III.9.

On munit V du produit scalaire défini par $(x, y) = y^T Ax$,

et $\mathcal{M}_N$ de la norme d'opérateur correspondante : $\|B\| = \sup\{(Bx, Bx)^{\frac{1}{2}} / (x, x) = 1\}$.

Calculer les adjoints respectifs de K et de $S\left(\frac{1}{4}\right)$ relativement à ce produit scalaire. Calculer K^*.

Calculer une majoration de $\|S[\mu_1, \mu_2]\|$ indépendante de N pour les valeurs suivantes de μ_1 et μ_2 :

$\mu_1 = 1, \mu_2 = 0$
$\mu_1 = 0, \mu_2 = 1$
$\mu_1 = 2, \mu_2 = 0$
$\mu_1 = 1, \mu_2 = 1$
$\mu_1 = 0, \mu_2 = 2$
$\mu_1 = 2, \mu_2 = 2$.

On utilisera les résultats de la question III.8.

QUESTION III.10.

Soient u^n, $u^{n+\frac{1}{3}}$, $u^{n+\frac{2}{3}}$ les éléments de W qui ont respectivement pour vecteur coordonnées dans la base d'éléments finis x^n, $x^{n+\frac{1}{3}}$, $x^{n+\frac{2}{3}}$. On note B l'opérateur de W dans lui-même dont la matrice dans la base d'éléments finis de W est $S\left(\frac{1}{4}\right)$. On désigne par $\bar{u}$ la solution de (II.4). Montrer que la méthode bigrille (III.6), (III.7) (III.8), (III.9) et (III.10) peut s'écrire de façon équivalente :

$u^{n+\frac{1}{3}} = B^{\mu_1}u^n + (I - B^{\mu_1})\bar{u}$;

$\theta^n \in \hat{W}$ et $[\theta^n, v] = [u^{n+\frac{1}{3}} - \bar{u}, v]$, $\forall v \in \hat{W}$;

$u^{n+\frac{2}{3}} = u^{n+\frac{1}{3}} - \theta^n$;

$u^{n+1} = B^{\mu_2}u^{n+\frac{2}{3}} + (I - B^{\mu_2})\bar{u}$.

On rappelle que $[\,,\,]$ est le produit scalaire de fonctions défini en (II.1).

IV. MÉTHODE MULTIGRILLE

On pose

$$N_k = 2^{k+1} - 1 ; \quad h_k = \frac{1}{N_k + 1} ; \quad W_k = V_{h_k}.$$

La matrice A_k est la matrice du problème $(II.4)_{W_k}$. Le vecteur $\bar{z}_k$ est la solution de (II.5) dans $\mathbb{R}^{N_k}$.

La méthode itérative f_k est la méthode définie dans W_k par la relation (II.7) *pour* $\varepsilon = \frac{1}{4}$.

Tournez la page S. V. P.

On notera i_k l'injection de W_{k-1} dans W_k, et P_k sa matrice dans les bases d'éléments finis respectives de W_{k-1} et W_k. La matrice R_{k-1} est définie par

$$R_{k-1} = P_k^T .$$

La méthode bigrille construite sur le couple d'espaces W_k et W_{k-1} est notée $f_k[\mu_1, \mu_2]$, et sa matrice $S_k[\mu_1, \mu_2]$.

On notera que l'indexation des opérateurs désigne le niveau de l'espace d'arrivée.

On se fixe un entier m. La méthode multigrille à $(m+1)$ grilles permet de résoudre le système

$$A_m \bar{x}_m = b_m$$

par l'algorithme suivant défini récursivement :

(IV.1) μ_1 et μ_2 sont des entiers positifs ou nuls donnés, tels que $\mu_1 + \mu_2 > 0$.

(IV.2) La suite $\gamma = (\gamma_k)_{1 \leq k \leq m-1}$ est une suite donnée d'entiers γ_k au moins égaux à 1.

(IV.3) Si $m = 1$, $F[\mu_1, \mu_2, \gamma, 1] = f[\mu_1, \mu_2]$.

Si $m > 1$, supposons définie l'itération multigrille à m grilles; celle-ci est notée $F[\mu_1, \mu_2, \gamma, m-1]$. Alors l'itération multigrille à $m+1$ grilles est définie par :

(IV.4) Prélissage sur la grille m :

$$x^{n+\frac{1}{2}} = f_m^{\mu_1}(x^n, b_m) ;$$

(IV.5) Calcul de résidu :

$$r^n = A_m x^{n+\frac{1}{2}} - b_m ;$$

(IV.6) Restriction à la grille $m-1$:

$$s^n = R_{m-1} r^n ;$$

(IV.7) Calcul approché de $(A_{m-1})^{-1} s^n$ par la méthode multigrille à m grilles :

$$z^n = F[\mu_1, \mu_2, \gamma, m-1]^{\gamma_{m-1}}(0, z^n) ;$$

(IV.8) Prolongement de la correction calculée sur la grille $m-1$ à la grille m :

$$c^n = P_m z^n ;$$

(IV.9) Fin du calcul de correction :

$$x^{n+\frac{2}{3}} = x^{n+\frac{1}{2}} - c^n ;$$

(IV.10) Postlissage sur la grille m :

$$x^{n+1} = f_m^{\mu_2}(x^{n+\frac{2}{3}}, b_m) .$$

On remarquera que l'étape (III.8) de la méthode bigrille (calcul de correction) est remplacée dans la méthode multigrille par les étapes (IV.6), (IV.7) et (IV.8). Au lieu de calculer exactement $(A_{m-1})^{-1} s^n$, on l'approche en utilisant une grille plus grossière.

Le choix des entiers γ_k comprend les cas particuliers importants ci-après :

(IV.11) V-cycle : $\gamma_k = 1$ quel que soit k.

(IV.12) W-cycle : $\gamma_k = 2$ quel que soit k.

(IV.13) Cycle mixte : $\gamma_k = 1$ si k est impair; $\gamma_k = 2$ si k est pair.

Question IV.1.

Soit $\Sigma[\mu_1, \mu_2, \gamma, m] = \Phi(F[\mu_1, \mu_2, \gamma, m])$. Montrer que $\Sigma[\mu_1, \mu_2, \gamma, m]$ est donnée par

$$\Sigma[\mu_1, \mu_2, \gamma, 1] = S[\mu_1, \mu_2] ;$$

$$\Sigma[\mu_1, \mu_2, \gamma, k+1] = S_{k+1}[\mu_1, \mu_2] + B'_{k+1}\ \Sigma[\mu_1, \mu_2, \gamma, k]^{\gamma_k} B_k ,$$

où B_k et B'_{k+1} sont des opérateurs qu'on précisera.

Question IV.2.

On munit chacun des espaces $\mathbb{R}^{N_k}$ de la norme d'énergie définie par

$$|x| = (x^T A_k x)^{\frac{1}{2}}, \ \forall x \in W_k .$$

On notera $\|\ \|$ la norme d'opérateur déduite de cette norme d'énergie, qui est la seule qu'on considérera dans la suite du problème.

La matrice K_k est l'analogue pour la méthode bigrille dans les espaces W_k et W_{k-1} de la matrice $K = \Phi(g)$ définie à la question III.4. Montrer que K_k est une projection orthogonale relativement au produit scalaire définissant la norme d'énergie. Donner le noyau et l'image de K_k.

Question IV.3.

Montrer que

$$\|P_k\| = \|(A_{k-1})^{-1} R_{k-1} A_k\| = 1 .$$

Question IV.4.

En déduire que

$$\|\Sigma[\mu_1, \mu_2, \gamma, k+1]\| \leq \|S_{k+1}[\mu_1, \mu_2]\| + \|\Sigma[\mu_1, \mu_2, \gamma, k]\|^{\gamma_k} .$$

Question IV.5.

Soit la suite définie par

$$\delta_1 = \sigma^0 ;$$

$$\delta_{k+1} = \sigma^0 + (\delta_k)^{\gamma_k} .$$

On choisit de faire un W-cycle. Montrer qu'il existe une valeur $\bar{\sigma}^0$ telle que si $\sigma^0 \leq \bar{\sigma}^0$ alors il existe $\delta^0 < 1$ tel que

$$\delta_k < \delta^0, \ \forall k \geq 1 .$$

En déduire que le W-cycle est convergent pour des valeurs bien choisies de μ_1 et μ_2.

• • •

6

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Le problème comprend cinq parties et est un problème plan

A.I. L'étude statique d'une « poutre de Warren » formée de barres rectilignes.

A.II. L'étude statique de cette poutre soumise à la flexion.

B.I. L'étude statique d'un mécanisme correspondant à une partie d'une grande roue de manège composée avec cette poutre supportant une nacelle.

B.II. L'étude dynamique de ce mécanisme.

B.III. L'étude dynamique de ce mécanisme entraîné avec une rotation uniforme.

Les parties A.I, A.II, B.I, B.II *et* B.III *peuvent être traitées de façon relativement indépendante, mais ont intérêt à être lues car elles contiennent dans leur introduction des définitions utiles pour la suite.*

PARTIE A

I. Étude statique d'une « poutre de Warren » formée de barres rectilignes

On appelle barre rectiligne un corps dont deux dimensions sont petites par rapport à la troisième, son axe étant rectiligne. Ici nous supposerons que ces deux dimensions petites sont nulles.

Dans tout le problème, les divers éléments sont plans et les barres rectilignes que nous considérons sont sans masse.

Ces barres sont assemblées par leurs extrémités en des nœuds supposés ponctuels et sans masse. Les efforts extérieurs à l'assemblage sont des forces ponctuelles appliquées aux nœuds, c'est-à-dire que le torseur représentatif de chaque effort extérieur a un moment nul en ce nœud.

Sur les barres les efforts extérieurs ne sont que les actions des nœuds, ces actions étant des forces ponctuelles appliquées aux extrémités de ces barres.

1. Propriétés d'une telle structure et exemple :

a. On isole une barre PQ et l'on considère les forces appliquées aux extrémités P et Q : $\overrightarrow{F_P}$ et $\overrightarrow{F_Q}$.

Montrer que $\overrightarrow{F_P}$ est parallèle à $\overrightarrow{PQ}$.

On notera $\overrightarrow{F_P} = -\, t_{PQ}\, \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}$, où t_{PQ} est la tension de la barre PQ.

Alors $\overrightarrow{F_Q} = -\, t_{QP}\, \dfrac{\overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{QP}|}$. Montrer que $\overrightarrow{F_P} = -\,\overrightarrow{F_Q}$, c'est-à-dire que

$$t_{PQ} = t_{QP}.$$

b. On isole un nœud P et l'on considère les barres PQ_1, PQ_2, ..., PQ_n aboutissant à ce nœud. On note $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les tensions de chacune des barres et $\vec{F}$ la résultante des efforts extérieurs appliqués à P.

Écrire l'équilibre du nœud P.

c. On considère l'assemblage représenté par la figure 1 :

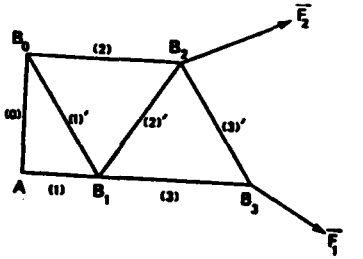

Figure 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$, cet assemblage est formé de sept barres AB_0, AB_1, B_0B_1, B_0B_2, B_1B_2, B_1B_3 et B_2B_3 articulées aux cinq nœuds A, B_0, B_1, B_2, B_3.

Pour simplifier les notations on notera les barres :

AB_0 : (0), AB_1 : (1), B_0B_2 : (2), B_1B_3 : (3)

et B_0B_1 : (1)', B_1B_2 : (2)', B_2B_3 : (3)'.

De même pour les tensions correspondantes :

$t_0, t_1, t_2, t_3, t_1', t_2', t_3'$.

Les barres (0) et (1) sont respectivement parallèles à $\vec{j}$ et $\vec{i}$.

Les barres (2) et (3) sont parallèles à $\vec{i}$ et de longueur l.

Les barres (1)', (2)' et (3)' sont de longueur l.

On pourra noter :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{B_1B_2}}{|\overrightarrow{B_1B_2}|} \qquad \vec{v} = \frac{\overrightarrow{B_1B_0}}{|\overrightarrow{B_1B_0}|}.$$

Les nœuds A et B_0 sont liés à un bâti fixe. Ils subissent des réactions ponctuelles inconnues $\overrightarrow{R_A}$ appliquée en A et $\overrightarrow{R_{B_0}}$ appliquée en B_0, où :

$$\overrightarrow{R_A} = X_A\vec{i} + Y_A\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{R_{B_0}} = X_{B_0}\vec{i} \qquad Y_{B_0} = 0.$$

Les nœuds B_0 et B_2 sont soumis à deux forces données :

$$\vec{F_1} = X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \vec{F_2} = X_2\vec{i} + Y_2\vec{j}.$$

Combien d'inconnues scalaires possède ce problème ?

Combien d'équations scalaires peut-on écrire en écrivant l'équilibre de tous les nœuds ?

En déduire les tensions dans chaque barre ainsi que les réactions du bâti en A et B_0.

2. On considère l'assemblage de barres représenté par la figure 2, appelé « poutre de Warren » :

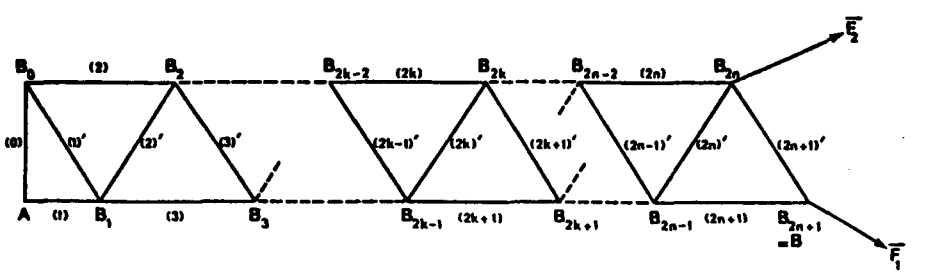

Figure 2

Tournez la page S. V. P.

Les barres (0) et (1) sont respectivement parallèles à $\vec{j}$ et $\vec{i}$.

Les barres (2), (3), ..., $(2n + 1)$ sont parallèles à $\vec{i}$ et de longueur l.

Les barres (1)', (2)', ..., $(2n + 1)'$ sont aussi de longueur l.

n ($n \geqslant 1$) est un nombre entier donné, k ($1 \leqslant k \leqslant n$) est aussi un nombre entier. On note $B_{2n+1} = B$ et $L = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Comme dans la question 1., les nœuds A et B_0 sont liés à un bâti avec des liaisons possédant les mêmes propriétés.

Les nœuds B et B_{2n} sont soumis à deux forces données :

$$\overrightarrow{F_1} = X_1\,\vec{i} + Y_1\,\vec{j} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{F_2} = X_2\,\vec{i} + Y_2\,\vec{j}.$$

a. Combien d'inconnues scalaires possède le problème ?

Combien d'équations scalaires peut-on écrire en écrivant l'équilibre de chaque nœud ?

b. Déterminer les tensions t_{2n}, t_{2n+1}, t'_{2n}, t'_{2n+1} dans les barres $(2n)$, $(2n + 1)$, $(2n)'$, $(2n + 1)'$.

c. Déterminer t'_{2k} en fonction de t'_{2k+1} ainsi que t'_{2k-1} en fonction de t'_{2k}. En déduire t'_{2k-1} et t'_{2k} pour tout k.

Déterminer de même t_{2k-2}, t_{2k-1}, t'_{2k-2} en fonction de t_{2k}, t_{2k+1}, t'_{2k}.

d. Mettre la relation précédente sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} t_{2k-2} \\ t_{2k-1} \\ t'_{2k-2} \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} t_{2k} \\ t_{2k+1} \\ t'_{2k} \end{pmatrix} \quad \text{où } H \text{ est une matrice } 3 \times 3.$$

H est-elle diagonalisable ?

Calculer H^2, H^3, en déduire H^n. Calculer H^{-1} puis H^{-n}.

e. En déduire l'expression de :

t_{2k}, t_{2k+1} en fonction de X_1, Y_1, X_2, Y_2 et de k.

Que peut-on dire si $l \to 0$, L restant constant ?

f. Terminer la résolution du problème en déterminant t_1 et t_0 ainsi que $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_{B_0}}$.

g. Vérifier directement que $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{R_{B_0}}$ ont bien la valeur obtenue au *f*.

h. On suppose que $\overrightarrow{F_2} = \vec{0}$, X_1 et Y_1 étant de même signe, dans quelle barre la tension est-elle la plus grande en valeur absolue ?

II. Étude statique d'une « poutre de Warren » soumise à la flexion

Dans cette partie nous étudions la déformation des barres rectilignes soumises aux efforts. Seule la barre AB_0 est assez rigide pour être considérée comme indéformable. Nous supposerons que ces barres sont toutes constituées d'un même matériau (à part la barre AB_0).

Si l'on considère une barre PQ isolée, nous avons vu dans la partie I qu'elle était soumise à deux forces ponctuelles $\overrightarrow{F_P}$ et $\overrightarrow{F_Q}$ avec :

$$\overrightarrow{F_P} = -\overrightarrow{F_Q} = -t_{PQ}\frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|}.$$

Nous supposerons que la déformation consiste uniquement en une variation de longueur des barres rectilignes et éventuellement un déplacement des extrémités correspondant à la déformation géométrique de l'ensemble.

L'extrémité qui était en P est alors en P', de même Q est en Q'.

L'allongement relatif (positif, négatif ou nul) vérifiant : $\varepsilon_{PQ} = \dfrac{\|\overrightarrow{P'Q'}\| - \|\overrightarrow{PQ}\|}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = K\,t_{PQ}$

où K est une constante donnée, t_{PQ} est la tension de la barre PQ.

1. Étude générale et exemple :

a. On isole une barre PQ et l'on considère sa position P'Q' après avoir appliqué les efforts ($P \neq Q$).

Montrer que : $\varepsilon_{PQ} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{QQ'} - \overrightarrow{PP'})}{\|\overrightarrow{PQ}\|^2} + \varphi(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{PQ})$

avec : $\dfrac{\varphi(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{PQ})}{\|\overrightarrow{PP'}\| + \|\overrightarrow{QQ'}\|} \xrightarrow[\text{et}]{\|\overrightarrow{PP'}\| \to 0} 0.$

$\|\overrightarrow{QQ'}\| \to 0$

Dans la suite, on prendra comme valeur supposée exacte : $\varepsilon_{PQ} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot(\overrightarrow{QQ'} - \overrightarrow{PP'})}{\|\overrightarrow{PQ}\|^2}$.

b. On considère l'assemblage de la figure 1 avec $\overrightarrow{F_2} = \vec{0}$, A et B_0 étant toujours fixes, les liaisons ayant les mêmes propriétés que pour la partie I.

Nous noterons (x_i, y_i) les coordonnées dans le repère $(A; \vec{i}, \vec{j})$ du nœud B_i, (x'_i, y'_i) celles du nœud B'_i, position de B_i après déformation,

$$\Delta x_i = x'_i - x_i \qquad \Delta y_i = y'_i - y_i.$$

En utilisant les valeurs des tensions obtenues au I, déterminer Δx_i et Δy_i pour $i = 1, 2, 3$.

2. On considère à nouveau la « poutre de Warren » du I.2, avec ici $\overrightarrow{F_2} = \vec{0}$.

a. Écrire la déformation des barres $(2k)'$ et $(2k + 1)'$.

b. Écrire la déformation des barres $(2k)$ et $(2k + 1)$.

c. En utilisant les valeurs des tensions obtenues au I, en déduire Δx_{2k} et Δx_{2k+1} ($1 \leqslant k \leqslant n$) en fonction de k, K, l, n, X_1 et Y_1.

d. Donner alors l'expression de Δx_{2n+1} en fonction de K, l, n, X_1 et Y_1.

e. En déduire $s_0 = \sum_{k=0}^{n} \Delta x_{2k}$ et $s_1 = \sum_{k=0}^{n} \Delta x_{2k+1}$

(on rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$)

f. Après avoir exprimé $\Delta y_{2k+1} - \Delta y_{2k}$ et $\Delta y_{2k} - \Delta y_{2k-1}$ en déduire l'expression de Δy_{2n+1} en fonction de s_0, s_1, Δx_{2n+1} et des données du problème. Montrer que Δy_{2n+1} peut alors se mettre sous la forme :

$$\Delta y_{2n+1} = Kl(P(n)\,X_1 + Q(n)\,Y_1)$$

où $P(n)$ et $Q(n)$ sont des polynômes en n à coefficients réels (*indépendants des paramètres du problème*).

Tournez la page S. V. P.

PARTIE B

Dans un repère $R(O; \vec{i}_0, \vec{j}_0, \vec{k}_0)$ orthonormé direct lié à un bâti $\mathcal{B}$, on étudie le mouvement par rapport à R_0 supposé galiléen d'un système matériel Σ constitué de S_1, S_2, et S_3. Σ se trouve dans le plan $(O; \vec{i}_0, \vec{j}_0)$, $\vec{j}_0$ étant la verticale ascendante, g l'accélération de la pesanteur. Σ est donc soumis à la pesanteur.

- S_1 est constitué par la « poutre de Warren » définie au I.2. Elle est fixée en A et B_0 à un dispositif réalisant une liaison pivot d'axe $(O; \vec{k}_0)$ avec le bâti $\mathcal{B}$ de sorte que O soit le milieu de AB_0. Les réactions en A et B_0 étant de même nature que dans la partie A.

  Le repère lié à S_1 est $(A; \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ avec :

$$\vec{i}_1 = \frac{\overrightarrow{AB_1}}{\|\overrightarrow{AB_1}\|}, \quad \vec{j}_1 = \frac{\overrightarrow{AB_0}}{\|\overrightarrow{AB_0}\|}, \quad \vec{k}_1 = \vec{i}_1 \wedge \vec{j}_1 = \vec{k}_0$$

  et l'on définit :

$$(\vec{i}_0, \vec{i}_1) = (\vec{j}_0, \vec{j}_1) = \theta \qquad \text{mesuré autour de } \vec{k}_0.$$

  On notera $L = \|\overrightarrow{AB}\|$

- S_2 est formé d'une plaque homogène plane ayant la forme d'une demi-ellipse de masse m coupée suivant le grand axe CD, de centre I, de centre d'inertie G, de demi-grand axe a et de demi-petit axe b.

  S_2 se trouve aussi dans le plan vertical $(O; \vec{i}_0, \vec{j}_0)$ et est suspendu à S_1 en B par deux barres BC et BD de même longueur et sans masse telles que $\|\overrightarrow{BI}\| = a$.

On note $d = \|\overrightarrow{BG}\|$. La liaison entre S_1 et S_2 est une liaison pivot parfaite d'axe $(B; \vec{k}_0)$, S_1 ne gênant pas la rotation complète de S_2 autour de B.

Soit $R(B; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct lié à S_2 avec : $\vec{i} = \frac{\overrightarrow{GB}}{\|\overrightarrow{GB}\|}$, $\vec{k} = \vec{k}_0$, $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

et $(\vec{i}_1, \vec{i}) = (\vec{j}_1, \vec{j}) = \alpha$ mesuré autour de $\vec{k}_0$.

- S_3 est un point matériel de masse m' placé en I. L'action de S_2 sur S_3 peut se représenter par une force ponctuelle $\vec{F}$ appliquée en I sur S_3, la liaison étant unilatérale c'est-à-dire que la relation :

  $\vec{F} \cdot \vec{i} > 0$ doit être vérifiée sinon $\vec{F} = \vec{0}$ et la liaison est rompue.

Ce mécanisme peut représenter par exemple une partie de la grande roue d'un manège forain : S_1 est un rayon de la roue, S_2 la nacelle, S_3 le passager.

I. Étude statique d'un mécanisme correspondant à une partie d'une grande roue de manège composée avec une poutre Warren supportant une nacelle

L'action du bâti $\mathcal{B}$ sur S_1 maintient S_1 immobile, S_2 restant lui aussi immobile $\left(\text{donc } \alpha + \theta = \frac{\pi}{2}\right)$, θ ayant une valeur arbitraire.

a. Déterminer en fonction de θ et des constantes du problème les actions de S_1 sur $\mathcal{B}$.

b. Déterminer de même les tensions dans les barres de S_1, déterminer la tension maximale en valeur absolue et la barre qui la subit pour $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

c. Déterminer la déformation de S_1 due aux efforts qu'elle subit, on donnera la variation de la position de B, c'est-à-dire Δx_B et Δy_B calculés dans $(A; \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ en fonction de θ et des constantes du problème.

II. Étude dynamique de ce mécanisme

Dans cette partie, le problème n'est plus statique et l'on supposera que la liaison entre $\mathcal{B}$ et S_1 se fait sans frottement, aucun moteur n'entraînant S_1 ici, S_1 étant indéformable.

Sauf indication contraire, on exprimera les résultats dans le repère $R_1(O; \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.

1. Calculer $\vec{V}(B/R_0)$, $\vec{V}(G/R_0)$, $\vec{\Gamma}(G/R_0)$, $\vec{V}(I/R_0)$ et $\vec{\Gamma}(I/R_0)$

   (respectivement : vitesse de B par rapport à R_0, vitesse de G par rapport à R_0, accélération de G par rapport à R_0, vitesse de I par rapport à R_0, accélération de I par rapport à R_0).

   Ceci en fonction des paramètres du problème et des dérivées premières et secondes de α et θ par rapport au temps.

2. Déterminer la valeur de $d = \|\overrightarrow{BG}\|$ et l'opérateur d'inertie en I de S_2 exprimé par sa matrice d'inertie représentative dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

   En déduire la matrice représentative dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'opérateur d'inertie en G de S_2.

3. Calculer le moment cinétique et le moment dynamique en B de $S_2 \cup S_3$ par rapport à R_0.

   Déterminer l'énergie cinétique de Σ.

4. Écrire alors une équation du mouvement.

5. Quelle relation doivent vérifier α, θ et leurs dérivées premières et secondes pour que la liaison unilatérale entre S_3 et S_2 soit maintenue ?

6. Trouver une intégrale première du mouvement.

III. L'étude dynamique de ce mécanisme entraîné avec une rotation uniforme

On supposera dans cette partie que S_1 est toujours indéformable et est entraîné par un moteur de sorte que $\dot{\theta} = \omega = \text{constante}$.

1. Obtenir une équation du mouvement. Écrire la nouvelle condition pour que la liaison unilatérale entre S_3 et S_2 reste satisfaite.

2. À quelle condition l'axe $\overrightarrow{GB}$ peut-il garder une direction fixe par rapport à R_0 ?

3. On veut étudier les mouvements avec ω et $\dot{\alpha}$ petits, et ayant pour conditions initiales :

$$t = 0 \qquad \theta = 0 \qquad \alpha = \pi/2 \qquad \dot{\alpha} = -\omega.$$

   a. Écrire l'équation différentielle vérifiée par le mouvement ainsi approché. Donner une solution de cette équation.

   b. Déterminer le torseur des efforts dû à l'action de S_3 sur S_1 dans le mouvement obtenu.

   c. L'étude statique de S_1 que nous avons faite est-elle valable ici ? Déterminer les tensions dans les barres constituant S_1.

• • •

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

DÉFINITIONS - NOTATIONS - RAPPELS

1° $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ le sous-ensemble des entiers strictement positifs.

$\mathbb{R}^+$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des réels positifs ou nuls.

2° Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On désigne par *variable aléatoire* (v.a. en abrégé) toute application mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, muni de sa tribu borélienne. Lorsque $n = 1$ une v.a. sera de façon plus précise appelée *variable aléatoire réelle* (v.a.r. en abrégé), et on notera $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Toutes les notions de mesurabilité relatives à des espaces de type $\mathbb{R}^p$, $p \in \mathbb{N}^*$, sont définies par rapport aux tribus boréliennes de ces espaces.

On note 1_A la fonction indicatrice d'un sous-ensemble A d'un ensemble $\mathcal{X}$.

3° Pour une v.a.r. X P-intégrable, on note EX l'intégrale $\int_\Omega X \, dP$.

Une v.a.r. X est dite du *second ordre* si $EX^2 < +\infty$.

Si $\mathcal{F}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, X une v.a.r. P-intégrable, $E(X \mid \mathcal{F})$ désigne l'espérance conditionnelle de X par rapport à $\mathcal{F}$, ou un représentant de cette espérance conditionnelle.

4° Pour toute suite de réels $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la notation $\lim_n x_n = x$ indique que d'une part la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et que d'autre part sa limite est x.

Pour x réel et A sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on pose : $d(x, A) = \inf_{y \in A} |x - y|$.

5° Un *processus* est la donnée d'une suite $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}, n \geqslant p}$, $p \in \mathbb{N}$, de v.a.r.

Soit $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}, n \geqslant p}$ une suite croissante $(\forall n \geqslant p, \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1})$ de sous-tribus de $\mathcal{A}$. Le processus $\{X_n\}_{n \geqslant p}$ est une *surmartingale* relative à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \geqslant p}$ si,

$\forall n \geqslant p$ | 1. X_n est $\mathcal{A}_n$-mesurable et P-intégrable;
2. $E(X_{n+1} \mid \mathcal{A}_n) \leqslant X_n$.

On admettra le résultat suivant :

(S.M.P) | Si $\{X_n\}_{n \geqslant p}$ est une surmartingale relative à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \geqslant p}$ telle que, $\forall n \geqslant p$, $X_n \geqslant 0$, alors il existe une v.a.r. X telle que P presque-sûrement la suite $\{X_n\}_{n \geqslant p}$ converge vers X.

PREMIÈRE PARTIE

Soient X_0 une v.a.r. et $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ un processus vérifiant les conditions suivantes :

1. Les v.a.r. ε_n, $n \in \mathbb{N}^*$, suivent la même loi.
2. $\forall n \geqslant 1$, $X_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ sont des v.a.r. indépendantes.

Soit $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

On considère le processus $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ défini par la donnée de X_0 et, pour $n \geqslant 0$, la relation :

$$X_{n+1} = \Phi_n(X_n, \varepsilon_{n+1}).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $B \in \mathcal{B}$, on pose $P\{\Phi_n(x, \varepsilon_{n+1}) \in B\} = T_n(x, B)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée par la v.a. $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

1.1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux v.a. $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ et ε_{n+1} sont indépendantes.

1.2. *a.* Montrer que, pour n et x fixés, l'application de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$: $B \longrightarrow T_n(x, B)$ est une probabilité.

Dans la suite, pour toute application mesurable l de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, on notera $T_n(x, l)$ l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} l(y) \, T_n(x, dy).$$

b. Montrer que, pour n et B fixés, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longrightarrow T_n(x, B)$ est mesurable.

c. Montrer que, pour tout n et toute application mesurable l de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longrightarrow T_n(x, l)$ est mesurable, et que $T_n(x, l) = \int_{\mathbb{R}} (l \circ \Phi_n)(x, y) \, d P_{\varepsilon_{n+1}}(y)$, où $P_{\varepsilon_{n+1}}$ désigne la loi de ε_{n+1}.

1.3. Soient h une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ et q, élément de $\mathbb{N}$, tels que $h(X_{q+1})$ soit P-intégrable.

a. Montrer que $$T_q(X_q, h) = E[h(X_{q+1}) \mid \mathcal{A}_q].$$

b. En déduire que
$$E[h(X_{q+1}) \mid \sigma(X_q)] = E[h(X_{q+1}) \mid \mathcal{A}_q],$$
où $\sigma(X_q)$ désigne la tribu engendrée par X_q.

1.4. Soit $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_n(x, V_{n+1}) < +\infty;$$

(2) $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad E V_n(X_n) < +\infty.$$

On pose : $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (LV)_n(x) = T_n(x, V_{n+1}) - V_n(x).$$

On suppose de plus que la propriété suivante est vérifiée :

(3) $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (LV)_n \leqslant 0.$$

a. Montrer que le processus $\{V_n(X_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une surmartingale relative à $\{\mathcal{A}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

b. On pose : $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad m(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}} V_n(x).$$

Outre les propriétés (1), (2), (3), la suite $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est supposée posséder la propriété :

(4) $$\lim_{|x| \to +\infty} m(x) = +\infty.$$

Déduire du *a* que $P\left\{\sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n| < +\infty\right\} = 1$.

1.5. Soit B un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$. Pour ε et R réels strictement positifs on pose :

$$U_{\varepsilon, R}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid d(x, B) \geqslant \varepsilon\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant R\}.$$

On dit qu'une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ *appartient à la classe* H(B) si, quels que soient ε et R strictement positifs pour lesquels $U_{\varepsilon, R}(B)$ est non vide, $\inf_{n \in \mathbb{N}, x \in U_{\varepsilon, R}(B)} \varphi_n(x) > 0$.

Soit $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant (1), (2), (4), et la propriété supplémentaire :

(5) $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (LV)_n \leqslant -a_n \varphi_n,$$

où $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs vérifiant $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty$, et $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à H(B).

a. Montrer que : $$P\left\{\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \varphi_n(X_n) < +\infty\right\} = 1.$$

Tournez la page S. V. P.

b. Déduire du *a* que, P-presque-sûrement, $\lim_n \varphi_n(X_n) = 0$. Montrer alors, en utilisant 1.4.*b*, que $P\{\lim_n d(X_n, B) = 0\} = 1$.

1.6. Soit $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant (1), (2), (4). On pose :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ M(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} V_n(x).$$

Soit B un sous-ensemble borné de $\mathbb{R}$ possédant la propriété suivante : pour toute suite de réels $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n d(x_n, B) = 0$, on a $\lim_n M(x_n) = 0$.

On suppose l'existence de deux suites de réels strictement positifs $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et d'une suite $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à H (B) pour lesquelles

(6) $$\forall n \in \mathbb{N},\quad (LV)_n \leqslant b_n(1 + V_n) - a_n\varphi_n.$$

(7) $$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n < +\infty.$$

a. Après avoir brièvement justifié l'existence des produits infinis $\prod_{i=n}^{\infty}(1 + b_i)$, montrer que la suite de fonctions $\{V'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad V'_n = (1 + V_n)\prod_{i=n}^{\infty}(1 + b_i),$$

vérifie les propriétés (1'), (2'), (4'), qui sont, respectivement, les propriétés (1), (2), (4), relatives, non à la suite $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, mais à la suite $\{V'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad (LV')_n \leqslant -a_n\varphi_n.$$

b. En déduire que, P presque-sûrement, $\lim_n V_n(X_n)$ existe.

Montrer alors, à l'aide de 1.5.*b* que $P\{\lim_n V_n(X_n) = 0\} = 1$.

c. Montrer que, si de plus la suite $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à H (B), $P\{\lim_n d(X_n, B) = 0\} = 1$.

1.7. Soient f et g deux applications mesurables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'existe un réel $K > 0$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad |f(x)| \leqslant K(1 + |x|),\quad |g(x)| \leqslant K(1 + |x|).$$

De plus f vérifie la propriété suivante : il existe un réel x_0 tel que, quels que soient ε et R réels strictement positifs pour lesquels $U_{\varepsilon,R}(\{x_0\})$ est non vide, $\sup_{x\in U_{\varepsilon,R}(\{x_0\})} f(x)(x - x_0) < 0$.

On suppose, en plus des hypothèses déjà faites sur X_0 et $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, que X_0 est du second ordre, et que, pour tout n, ε_n est centrée et du second ordre; on note σ^2 la variance de ε_n. Soit $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall (x, u) \in \mathbb{R}^2,\quad \Phi_n(x, u) = x + c_n[f(x) + g(x)u].$$

Cette question constitue une application de ce qui précède au cas où le processus $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est défini à l'aide de cette suite particulière $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. On utilise comme suite $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\quad V_n(x) = (x - x_0)^2.$$

a. Montrer que la suite $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1), (2) et (4).

b. Montrer que la suite $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (6) pour un choix convenable de B et des suites $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, et $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Déduire de la question 1.6 une condition suffisante relative à la suite $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pour que $P\{\lim_n X_n = x_0\} = 1$.

1.8. Soit $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi, notée P^θ, dépendant d'un paramètre réel θ dont la vraie valeur, notée θ_0, est supposée inconnue. On suppose de plus que U_1 est du second ordre.

a. On pose $m_1(\theta) = \int_{\mathbb{R}} y\, dP^\theta(y)$. On suppose que m_1 est une fonction strictement croissante, et que de plus il existe un réel $K' > 0$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\quad |m_1(\theta)| \leqslant K'(1 + |\theta|).$$

On définit un processus $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ par $Z_0 = z_0$ et

(8) $$\forall n \in \mathbb{N},\quad Z_{n+1} = Z_n + d_n[U_{n+1} - m_1(Z_n)],$$ où z_0 est un réel et $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Utiliser la question 1.7 pour donner des hypothèses sur la suite $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ permettant de conclure que $P\{\lim_n Z_n = \theta_0\} = 1$.

b. Dans le cas où θ est la moyenne des v.a.r. U_n, montrer que le processus $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $Z_0 = 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $Z_n = \frac{1}{n}(U_1 + U_2 + \ldots + U_n)$, peut être défini par (8) pour un choix particulier de $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Retrouver ainsi un résultat classique.

DEUXIÈME PARTIE

Soient X_0 une v.a.r. et $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ un processus vérifiant les conditions 1 et 2 définies au début de la première partie. On suppose de plus que X_0 est du second ordre, et que, pour tout n, ε_n est centrée et du second ordre, de variance $\sigma^2 > 0$.

Soit F une application mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. Il existe un réel $C > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |F(x)| \leqslant C|x|$.
2. F est dérivable en 0 et, si on pose $F'(0) = -\alpha$, on a $\alpha > 0$.

On note, pour x réel, $r(x) = F(x) + \alpha x$.

a désigne un réel vérifiant : $a > 0$, et $2\alpha a > 1$.

On considère le processus $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ défini par la donnée de X_0 et, pour $n \geqslant 0$, la relation :

(1) $$\forall n \in \mathbb{N},\quad X_{n+1} = X_n + \frac{a}{n+1}F(X_n) + \frac{a}{n+1}\varepsilon_{n+1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée par la v.a. $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

Le but de cette partie est l'étude du comportement asymptotique du processus $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, défini par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad Y_n = n^{\frac{1}{2}}X_n.$$

On pose $A = \frac{1}{2} - \alpha a$ et, pour $(j, n) \in \mathbb{N}^2$, $j \leqslant n$,

$$A_{j,n} = \prod_{i=j+1}^{n}\left(1 + \frac{A}{i}\right) \text{ si } j < n, \quad A_{n,n} = 1.$$

On admettra les propriétés suivantes :

(2) $\forall t > 0,\ \exists H \in \mathbb{R},\ H > 0$, tel que $\forall (j, n) \in \mathbb{N}^2,\ 0 < j < n,$ $$\left|\prod_{i=j+1}^{n}\left(1 - \frac{t}{i}\right)\right| \leqslant H\left(\frac{j}{n}\right)^t.$$

(3) $$\lim_n \sum_{j=1}^{n}\frac{A_{j,n}^2}{j+1} = \frac{-1}{2A}.$$

2.1. *Jusqu'à la question 2.4 incluse on impose de plus à F l'hypothèse supplémentaire :*

(4) $$\forall x \in \mathbb{R},\quad xF(x) \leqslant -kx^2,$$

où k est un réel > 0 tel que : $2ak > 1$.

a. Montrer qu'existent deux réels $\beta > 1$, $\gamma > 0$, et un entier N tels que :

$$\forall n \geqslant N,\quad E(X_{n+1}^2 \mid \mathcal{A}_n) \leqslant \left(1 - \frac{\beta}{n+1}\right)X_n^2 + \frac{\gamma}{(n+1)^2}.$$

Tournez la page S. V. P.

b. Montrer que, pour tout réel $s > -1$, la suite $\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{j^s}{n^{1+s}} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente; quelle est sa limite ?

c. Montrer qu'existe un réel $\delta > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad E X_n^2 \leqslant \frac{\delta}{n}.$$

d. Soient c et c' deux réels vérifiant : $0 < c < 1$, $0 < c'$.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = n^c . X_n^2 + n^{-c'}$.

Démontrer que si $c + c' < 1$, il existe un entier N' tel que le processus $\{ Z_n \}_{n \geqslant N'}$ est une surmartingale relative à $\{ \mathcal{A}_n \}_{n \geqslant N'}$. En déduire que, pour tout réel c vérifiant $0 < c < 1$, $P \{ \lim_n n^c X_n^2 = 0 \} = 1$.

Pour la suite on admettra que, par des calculs élémentaires effectués à partir de (1), *on peut prouver l'existence d'une suite de réels* $\{ c_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$, *où* $c_n = O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, *telle que :*

(5) $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_{n+1} = A_{0,n} X_1 + \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} \left[c_j X_j + \frac{a}{(j+1)^{\frac{1}{2}}} (r(X_j) + \varepsilon_{j+1}) \right].$$

2.2. Montrer que $P \left\{ \lim_n \sum_{j=1}^{n} A_{j,n} c_j X_j = 0 \right\} = 1$

(on pourra pour ce faire écrire :

$$\sum_{j=1}^{n} A_{j,n} c_j X_j = \sum_{j=1}^{N-1} A_{j,n} c_j X_j + \sum_{j=N}^{n} A_{j,n} c_j X_j,$$

et, pour N convenablement choisi, étudier le comportement asymptotique de chacune des deux sommes du membre de droite).

2.3. *a.* Montrer que $\lim_n n^{\frac{1}{2}} E | r(X_n) | = 0$.

b. En déduire que la suite de v.a.r. $\left\{ \sum_{j=1}^{n} \frac{A_{j,n} r(X_j)}{(j+1)^{\frac{1}{2}}} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers 0 *(on pourra comme à la question 2.2 décomposer la somme en deux).*

2.4. On note :

$$\forall (j, n) \in \mathbb{N}^2, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad X_{j,n} = \frac{A_{j,n} \varepsilon_{j+1}}{(j+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette question a pour but de démontrer que la famille de v.a.r. $\{ X_{j,n} \}_{(j,n) \in \mathbb{N}^2, 1 \leqslant j \leqslant n}$ *vérifie les conditions de la propriété* (P) *énoncée dans l'annexe située à la fin de l'énoncé.*

a. Montrer que la famille $\{ X_{j,n} \}$ vérifie les conditions H_1 et H_2 de (P).

b. Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'existe une suite de réels $\{ \alpha_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant vers 0, et telle que :

$$\forall (j, n) \in \mathbb{N}^2, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \qquad E [X_{j,n}^2 1_{]\varepsilon, +\infty[} (|X_{j,n}|)] \leqslant \frac{\alpha_j}{j+1} A_{j,n}^2.$$

En déduire que la condition H_3 est vérifiée par la famille $\{ X_{j,n} \}$

c. Soient $\{ U_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{ V_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de v.a.r. On suppose que $\{ U_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers 0 et que $\{ V_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une v.a.r. V. Montrer que la suite $\{ U_n + V_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers V.

d. Déduire du c, à l'aide de (P), le comportement asymptotique du processus $\{ Y_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2.5. *Dans cette question on étend le résultat obtenu en 2.4.d. au cas où la condition* (4) *est supprimée, et remplacée par la condition :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall R > \varepsilon, \quad \sup_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant R} x F(x) < 0.$$

On admettra qu'on peut déterminer deux réels $\lambda > 0$, $\mu > 0$, où λ vérifie la condition $2a\lambda > 1$, et tels que la fonction $F_{\lambda,\mu}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_{\lambda,\mu}(x) = F(x) 1_{]\mu, +\infty[}(|x|) - \lambda x 1_{]\mu, +\infty[}(|x|),$$

vérifie la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x F_{\lambda,\mu}(x) \leqslant -\lambda x^2.$$

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit le processus $\{ X_n^N \}_{n \geqslant N}$ par les conditions suivantes :

$$\forall n \geqslant N, \quad X_{n+1}^N = X_n^N + \frac{a}{n+1} F_{\lambda,\mu}(X_n^N) + \frac{a}{n+1} \varepsilon_{n+1}, \quad X_N^N = X_N,$$

où $\{ X_n \}_{n \in \mathbb{N}}$ est le processus défini à l'aide de F, de X_0, et de $\{ \varepsilon_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans l'introduction de cette partie.

a. Après avoir démontré que la question 1.7. entraîne :
P presque-sûrement $\lim_n X_n = 0$, démontrer que :

$$\lim_N P \{ \sup_{n \geqslant N} | X_n - X_n^N | > 0 \} = 0.$$

b. Préciser alors le comportement asymptotique du processus $\{ Y_n \}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

ANNEXE : Proposition (P)

Soit $\{ Y_{j,n} \}_{(j,n) \in (\mathbb{N}^*)^2, j \leqslant n}$, une famille de v.a.r. centrées et du second ordre, vérifiant les trois conditions suivantes :

H_1 : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, les v.a.r. $Y_{1,n}, Y_{2,n}, \ldots, Y_{n,n}$ sont indépendantes.

H_2 : La suite $\left\{ \sum_{j=1}^{n} E Y_{j,n}^2 \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite, notée S^2.

H_3 : Pour tout réel $\varepsilon > 0$, la suite $\left\{ \sum_{j=1}^{n} E (Y_{j,n}^2 1_{]\varepsilon, +\infty[} (|Y_{j,n}|)) \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Alors la suite de v.a.r. $\left\{ \sum_{j=1}^{n} Y_{j,n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une v.a. suivant la loi normale centrée, de variance S^2.

OPTION MATHÉMATIQUES DE L'INFORMATIQUE

Le but du problème est d'établir que l'égalité de deux fonctions primitives récursives est indécidable en général (première partie), mais que si les définitions des fonctions sont assujetties à ne pas contenir de paramètre (les fonctions obtenues sont unaires) et que les définitions sont linéaires, alors l'égalité de deux fonctions devient décidable.

PREMIERE PARTIE

On rappelle ici quelques points de calculabilité. L'ensemble des entiers naturels est désigné par N. Pour tout entier n positif ou nul, on note F_n l'ensemble des fonctions (non nécessairement partout définies) de N^n dans N, et on pose $F = \bigcup_{n\geq 0} F_n$. L'ensemble des fonctions *primitives récursives* est la plus petite partie P de F qui contient les fonctions de base suivantes :

$(i) p_i(x_1,...,x_n) = x_i$ pour tout $n > 0$ et tout $i (1 \leq i \leq n)$

$(ii) 0(x_1,...,x_n) = 0$ pour tout $n \geq 0$, la fonction constante de valeur nulle,

(iii) la fonction successeur $s : N \to N$ définie par $s(x) = x + 1$,

et qui est de plus fermé pour les deux opérations suivantes :

(iv) la composition des fonctions : si les fonctions $h : N^q \to N$ et $g_i : N^p \to N$ pour $i = 1,...,q$ sont dans P, il en va de même de la fonction $f : N^p \to N$ définie par

$$f(x_1,...,x_p) = h(g_1(x_1,...,x_p),...,g_q(x_1,...,x_p))$$

(v) la récurrence sur une variable : si les fonctions $g : N^n \to N$ et $h : N^{n+2} \to N$ sont dans P, il en va de même de la fonction $f : N^{n+1} \to N$ définie par récurrence ainsi :

$$\begin{cases} f(0,y_1,...,y_n) = g(y_1,...,y_n) \\ f(x+1,y_1,...,y_n) = h(f(x,y_1,...,y_n),x,y_1,...,y_n) \end{cases}$$

Il ressort de cette définition qu'une fonction primitive récursive de N^n dans N est définie sur tout l'ensemble de départ, ou si l'on préfère, est une application $N^n \to N$.

L'ensemble des fonctions *récursives* est la plus petite partie R de F qui contient les fonctions de base du type (i), (ii), (iii), qui est fermé pour la composition (iv), la récurrence (v) ainsi que pour les opérations du type suivant :

(vi) la minimisation : si la fonction $g : N^{n+1} \to N$ est dans R, il en va de même de la fonction $f : N^n \to N$ définie sur l'ensemble $\{(x_1,...,x_n) | (\exists y) g(x_1,...,x_n,y) = 0\}$ par l'équation suivante :

$$f(x_1,...,x_n) = \inf\{y | g(x_1,...,x_n,y) = 0\}$$

(la fonction f est ainsi définie par son graphe d'équation implicite $g(x_1,...,x_n,y) = 0$).

1) Montrez que les fonctions suivantes sont primitives récursives :

a) $(x,y) \mapsto x + y$, la somme de deux entiers,

b) $(x,y) \mapsto xy$, le produit de deux entiers,

c) $p(0) = 0$ et $p(x) = x - 1$ pour $x > 0$, le prédécesseur d'un entier,

d) $f(x,y) = 0$ si $x < y$, et $f(x,y) = x - y$ sinon; cette soustraction modifiée sera désormais désignée par $x - y$;

e) $d(x,y) = y - x$ si $x < y$, et $d(x,y) = x - y$ sinon, la distance de x et y,

f) $(x,y) \mapsto 1$ si $x = y$, $(x,y) \mapsto 0$ sinon, l'égalité de deux entiers,

g) $\neg(0) = 1$ et $\neg(x) = 0$ pour $x \neq 0$, la négation,

h) $(x,y) \mapsto x \vee y$ et $(x,y) \mapsto x \wedge y$, respectivement le plus grand et le plus petit de deux entiers,

k) $(x,y,z) \mapsto y$ si $x > 0$ et $(x,y,z) \mapsto z$ sinon, la conditionnelle si x alors y sinon z.

2) a) Montrez que si une fonction $g : N^2 \to N$ est primitive récursive, il en va de même de la fonction $f : N^2 \to N$ définie comme suit :

$$f(t,x) = \begin{cases} \inf\{y < t | g(x,y) = 0\} & \text{s'il existe } y < t \text{ avec } g(x,y) = 0, \\ t & \text{s'il n'existe aucun } y < t \text{ satisfaisant } g(x,y) = 0. \end{cases}$$

L'entier t s'appelle une borne de minimisation.

b) Déduisez-en que si une fonction $f : N \to N$ est primitive récursive, nulle en zéro et strictement croissante, alors sa réciproque $g : N \to N$ définie par

$$g(x) = y \iff f(y) \leq x < f(y+1)$$ est aussi primitive récursive.

3) On considère la fonction $c : N^2 \to N$ définie par $c(x,y) = x + (x+y)(x+y+1)/2$.

a) Montrez qu'elle est primitive récursive et bijective.

b) Trouvez deux fonctions primitives récursives $l, r : N \to N$ satisfaisant $l(c(x,y)) = x$ et $r(c(x,y)) = y$ pour tous les entiers x et y. Montrez qu'alors elles satisfont également

$$(\forall n \in N) c(l(n), r(n)) = n$$

4) a) On remplace la définition (v) par la suivante, qui en est la restriction à $n = 1$:

(v') si les fonction $g : N \to N$ et $h : N^3 \to N$ sont primitives récursives, il en va de même de la fonction $f : N^2 \to N$ définie par : $\begin{cases} f(0,y) = g(y) \\ f(x+1,y) = h(f(x,y),x,y) \end{cases}$

Montrez que les fonctions primitives récursives et les fonctions récursives obtenues après ce remplacement sont les mêmes qu'avant : dans les récurrences, on peut supposer sans perte de généralité que les fonctions définies n'ont pas plus d'un paramètre.

b) De même, montrez que si l'on remplace aussi l'opération (vi) par l'opération (vi') qui en est la restriction à $n = 1$, on obtient les mêmes fonctions récursives qu'avant : dans les minimisations, on peut supposer sans perte de généralité que les fonctions définies sont unaires.

5) a) Montrez que si $f : N \to N$ est primitive récursive, la fonction itérée $g : N^2 \to N$ définie par $g(x,y) = f(...f(x)...)$ (y fois) est aussi primitive récursive. On note aussi $g(x,y) = f^y(x)$.

b) Soit $k : N \to N$ une fonction primitive récursive satisfaisant $k(0) = 0$ et $k(x) < x$ pour $x > 0$. Montrez que la fonction $m : N \to N$ définie par $m(x) = \inf\{n | k^n(x) = 0\}$ est aussi primitive récursive.

c) Déduisez-en que si les fonctions $g : N \to N$ et $h : N^3 \to N$ sont primitives récursives, alors il en va de même de la fonction $f : N^2 \to N$ définie comme suit :

$$\begin{cases} f(0,y) = g(y) \\ f(x,y) = h(f(k(x),y),x,y) \quad \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Comment interprétez-vous ce résultat, en français ?

6) a) Soit $f : N^2 \to N$ une fonction primitive récursive. Montrez que la fonction $g : N^2 \to N$ suivante est aussi primitive récursive :

$$g(x,y) = \prod_{0 \leq t \leq x} f(t,y)$$

Tournez la page S. V. P.

b) Etant donné une fonction $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ primitive récursive, montrez qu'on peut lui associer une fonction $g : \mathbf{N}^2 \to \{0,1\}$ primitive récursive telle qu'en tout x, la fonction $y \mapsto g(x,y)$ ne s'annule pas si l'ensemble $\{y | f(x,y) = 0\}$ est vide, et sinon s'annule seulement pour le plus petit élément de cet ensemble.

7) a) Montrez qu'on peut associer à toute fonction récursive $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une fonction primitive récursive $g : \mathbf{N}^2 \to \{0,1\}$ satisfaisant

$$f(x) = 0 \iff (\exists t) g(t,x) = 0$$

(on pourra imposer t comme borne commune à toutes les minimisations nécessaires au calcul de f et raisonner par récurrence sur le nombre de minimisations figurant dans la définition de f).

b) Montrez qu'on peut associer à toute fonction récursive $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une fonction primitive récursive $h : \mathbf{N}^2 \to \{0,1\}$ satisfaisant

$$\{y | (\exists x) f(x) = y\} = \{y | (\exists t) h(x,t) = 0\}.$$

8) Etant donné une fonction récursive $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ montrez qu'il existe une fonction primitive récursive $p : \mathbf{N}^2 \to \{0,1\}$ satisfaisant :

$$f(x) = l(\inf\{t | p(x,t) = 0\})$$

où l est la fonction définie à la question 3 (on pourra appliquer la question précédente au graphe de f et se rappeler la question 4).

9) On rappelle que le problème de savoir si une fonction récursive ne s'annule jamais est indécidable. Que pensez-vous des problèmes suivants :

a) décider si une fonction primitive récursive est toujours nulle ?

b) décider si deux fonctions primitives récursives sont égales ?

SECONDE PARTIE

Cette partie est indépendante de la première.

Notations : Une relation R sur un ensemble E est une partie du produit cartésien $E \times E$. On note xRy au lieu de $(x,y) \in R$. Etant donné deux relations R et S sur un ensemble E, on note RS la composition des relations : $xRSy \Leftrightarrow (\exists x) xRx \wedge xSy$

La relation R^0 est l'identité de E; on pose $R^n = R^{n-1}R$ pour tout $n > 0$, et on note R^{-1} la relation $xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$.

On note R^+ la fermeture transitive de R : $R^+ = \bigcup_{n>0} R^n$.

On note R^* la fermeture réflexive et transitive de R : $R^* = \bigcup_{n\geq 0} R^n$.

Par suite, $(R \cup R^{-1})^*$ est la relation d'équivalence engendrée par R.

10) Montrez que pour une relation réflexive et transitive R définie sur un ensemble E, les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) Il n'existe pas de chaîne infinie $x_0 R \ldots x_n R x_{n+1} \ldots$ où pour tout n on a $x_n \neq x_{n+1}$.

(*ii*) Toute chaîne infinie $x_0 R \ldots x_n R x_{n+1} \ldots$ est constante à partir d'un certain rang.

(*iii*) Toute partie P non vide de E contient un élément x maximal pour R, ou encore: $xRy \wedge y \in P \Rightarrow y = x$

Une relation satisfaisant ces propriétés est dite *noetherienne*, et E est dit *noetherien pour* R.

Une relation noetherienne est-elle une relation d'ordre ? Les éléments maximaux de l'ensemble $\{y \in E | xRy\}$ s'appellent les formes *normales* ou *irréductibles* de x.

11) Etant donné deux ensembles A et B ordonnés noetheriens pour $\leq$, les relations suivantes sont-elles noetheriennes ?

a) sur $A \times B$, l'ordre produit : $(x,y) \leq (x',y') \Leftrightarrow x \leq x' \wedge y \leq y'$,

b) sur $A \times B$, l'ordre lexicographique : $(x,y) \leq (x',y') \Leftrightarrow (x < x') \vee (x = x' \wedge y \leq y')$,

c) sur l'ensemble A^* des suites finies d'éléments de A, l'ordre alphabétique :

$$u = a_1 \ldots a_m \leq v = b_1 \ldots b_n \Leftrightarrow \exists i (a_1 \ldots a_i = b_1 \ldots b_i \wedge a_{i+1} < b_{i+1}) \vee (\exists w \in A^*) uw = v.$$

12) On définit la relation suivante sur l'ensemble $\mathbf{N}^*$ des suites d'entiers naturels :

$$u \to v \Leftrightarrow u = (u_1 0 p u_2) \wedge (v = u_1 w u_2)$$

où w est une suite d'entiers naturels strictement inférieurs à p, éventuellement précédée de p : $w \in [0, p-1]^* \cup p[0, p-1]^*$.

A toute suite $w = w_1 \ldots w_n \in \mathbf{N}^*$ on associe $s(w) = \sup\{w_i\}$, et $d(w) = |w|_{s(w)}$ le nombre de fois que figure dans w le plus grand entier présent dans w. Montrez que toute chaîne pour $\to$ partant de w est finie, par récurrence sur le couple $(s(w), d(w))$ ordonnée lexicographiquement.

13) Sur un ensemble E on donne une relation R dont la fermeture réflexive et transitive est noetherienne.

a) Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $(\forall x)(\forall y) x(R \cup R^{-1})^* y \Rightarrow \exists z (xR^*z \wedge yR^*z)$

(*ii*) $(\forall u)(\forall x)(\forall y)(uR^*x \wedge uR^*y) \Rightarrow \exists z (xR^*z \wedge yR^*z)$

(*iii*) Tout élément de E a une unique forme irréductible.

Pour prouver (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la définition (*iii*) de l'ordre noetherien.

b) Donnez un contre-exemple à l'équivalence dans le cas où R^* n'est pas noetherienne.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie, on considère les arbres dont les sommets ont des étiquettes prises dans un ensemble A doté d'une fonction *arité* $\alpha : A \to \mathbf{N}$ et assujettis à la condition qu'un sommet étiqueté par une étiquette a ait $\alpha(a)$ successeurs. On supposera de plus $\alpha^{-1}(0) \neq \emptyset$. Etant donné un ensemble X de variables disjoint de A, on définit l'ensemble T(A,X) des arbres ou termes sur A à variables dans X comme le plus petit ensemble contenant X et fermé pour l'opération suivante :

$$a \in A \wedge t_1, \ldots, t_{\alpha(a)} \in T(A,X) \Rightarrow a t_1 \ldots t_{\alpha(a)} \in T(A,X)$$

L'arbre $at_1 \ldots t_{\alpha(a)}$ a pour *racine* a et pour *sous-arbres* les arbres $t_1, \ldots, t_{\alpha(a)}$; on le désigne aussi par $a(t_1, \ldots, t_{\alpha(a)})$, et a apparaît alors explicitement comme une opération n-aire $T(A,X)^n \to T(A,X)$ où $n = \alpha(a)$.

Tournez la page S. V. P.

Etant donné une fonction $\sigma : X \to T(A,X)$, on appelle *substitution* engendrée par σ la fonction $T(A,X) \to T(A,X)$, désignée encore par σ, qui à tout arbre t fait correspondre l'arbre obtenu en remplaçant simultanément dans t chaque variable x par l'arbre $\sigma(x)$: on a remplacé chaque variable par sa « valeur ». Les fonctions σ considérées seront toujours égales à l'identité sur X sauf pour un nombre fini de variables $x_1, ..., x_n$, ce qui permet de les désigner par la notation

$$\sigma = [x_1 \leftarrow u_1, ..., x_n \leftarrow u_n]$$

Ainsi on a, par exemple, $a(x,y)[x \leftarrow y, y \leftarrow byx] = a(y, b(y,x))$. Ici et dans la suite, on utilise la notation $t(x_1, ..., x_n)$ pour signaler que le terme t contient les variables $x_1, ..., x_n$ et $t(u_1, ..., u_n)$ pour le terme $t[x_1 \leftarrow u_1, ..., x_n \leftarrow u_n]$.

Enfin on dira qu'une relation R sur T(A,X) est une *récriture* si elle est stable par substitution et par les opérations de A :

$r \to t \Rightarrow r\sigma \to t\sigma$ pour toute substitution σ

$r \to t \Rightarrow a(s_1, ..., r, ..., s_n) \to a(s_1, ..., t, ..., s_n)$ pour toute étiquette a avec $n = \alpha(a)$

14) On se donne un ensemble fini F, une application arité $\alpha : F \to N$ et une application $\pi : F \to N$. Un système primitif récursif définissant F est une relation finie notée $\to$ où pour tout $f \in F$ et tout $a \in A$ il existe un et un seul élément de la forme

$$f(ax_1...x_n, y_1, ..., y_m) \to r$$

où $r \in T(A \cup F, X)$ est assujetti aux deux conditions suivantes :

(*i*) Pour tout $g \in F$ figurant dans r on a $\pi(g) \leq \pi(f)$.

(*ii*) Pour tout $g \in F$ figurant dans r on a $\pi(g) = \pi(f)$ seulement si le premier argument de g appartient à $\{x_1, ..., x_n\}$ et les autres à $\{y_1, ..., y_m\}$.

Les systèmes primitifs récursifs de la première partie sont-ils des systèmes primitifs récursifs dans ce sens ? et réciproquement ?

15) Montrez que la récriture engendrée par un système primitif récursif est noetherienne. Pour ce faire, on définira $\pi(a) = 0$ pour toute étiquette $a \in A$ et on appliquera le résultat de la question 12 aux branches des arbres considérés.

16) Montrez que la récriture engendrée par un système primitif récursif satisfait les conditions de la question 13.

On désigne par $\nu(t)$ la forme irréductible d'un terme t pour cette récriture.

Dorénavant, on considère les systèmes primitifs récursifs linéaires sans paramètre, où les équations de définition ont la forme

$$f(ax_1...x_n) \to r$$

où $r \in T(A \cup F, X)$ est assujetti à la condition (L) suivante :

Pour tout $g \in F$ figurant dans r les arguments de g appartiennent à $\{x_1, ..., x_n\}$.

17) Montrez que les fonctions $d(x), m(x)$ et $r(x)$ définies sur N et valant respectivement le double de x, la partie entière de la moitié de x, et le reste de x dans la division par 2, peuvent être définies par des systèmes primitifs récursifs linéaires sans paramètre.

18) On appelle *équivalence* une paire $r \equiv s$ de termes satisfaisant la condition (L) ci-dessus. Une équivalence $r(x_1, ..., x_n) \equiv s(x_1, ..., x_n)$ est *valide* si pour toute substitution $[x_1 \leftarrow t_1, ..., x_n \leftarrow t_n]$ où $t_i \in T(A, \emptyset)$ pour tout i, on a

$$\nu(r(t_1, ..., t_n) = \nu(s(t_1, ..., t_n))$$

(cf. question 16) On cherche à décider si un ensemble d'équivalences est valide, c'est-à-dire si toutes ses équivalences sont valides.

On définit sur les ensembles finis d'équivalences une relation $\to$ comme suit :

$(i) E \cup \{r \equiv r\} \to E$

$(ii) E \cup \{ar_1...r_n \equiv bs_1...s_m\} \to$ faux

$(iii) E \cup \{x \equiv ar_1...r_n\} \to$ faux

$(iv) E \cup \{ar_1...r_n \equiv as_1...s_n\} \to E \cup \{r_1 \equiv s_1, ..., r_n \equiv s_n\}$

$(v) E \cup \{fx \equiv t(x, f_1y_1, ..., f_ny_n)\} \to E \cup \{fx \equiv t(x, v_1, ..., v_n), f_1y_1 \equiv v_1, ..., f_ny_n \equiv v_n\}$

où $v_i = \nu(f_ic)$ pour tout i et $c \in A$ est une constante d'arité nulle.

a) Montrez que si $E \to E'$, alors E et E' sont valides simultanément.

b) Montrez que la relation $\to^*$ sur les ensembles finis d'équivalences est noetherienne et vérifie les conditions équivalentes de la question 13.

c) On note I(E) la forme irréductible d'un ensemble E. Que vaut $I(E \cup E')$?

19) Quelle forme ont les équivalences d'un ensemble irréductible ? Etant donné une équivalence irréductible $fx \equiv s(f_1x, ..., f_nx)$ majorez la taille du terme s. On rappelle qu'il existe au moins une constante dans A d'arité nulle.

20) On définit sur les ensembles irréductibles d'équivalences une fonction D, comme Développé :

$(i) D(\text{faux}) = \text{faux}$

$(ii) D(\{fx \equiv s(x)\}) = \{\nu(f(ax_1...x_n)) \equiv \nu(s(ax_1...x_n)) | a \in A \wedge n = \alpha(a)\}$

On étend D par additivité : le développé d'une réunion est la réunion des développés. Finalement, on pose $C(E) = E \cup I(D(E))$.

Que peut-on dire de la suite $C^k(I(E))$ pour $k \in N$?

21) a) Montrez qu'un ensemble d'équivalences fini E, irréductible, vérifiant $E = C(E)$ et différent de faux est valide (on pourra raisonner par récurrence sur les termes $t \in T(A, \emptyset)$ vérifiant $\nu(f(t)) = \nu(s(f_1(t), ..., f_n(t)))$ pour tout $fx \equiv s(f_1x, ..., f_nx)$ de E).

b) Qu'en concluez-vous sur l'équivalence des termes pour un système primitif récursif linéaire sans paramètre ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail